

① Teoría.

② a) Propositiones atómicas:

b : bebo agua

s : tengo sed

c : tengo cerveza

d : como demasiado.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1: b \rightarrow s \wedge \neg c \\ \varphi_2: \neg d \rightarrow \neg s \\ \varphi_3: d \rightarrow \neg b \end{array} \right\} \text{PREMISAS}$$

$$\varphi: \neg c \rightarrow \neg b \quad \text{CONCLUSIÓN}$$

RAZONAMIENTO

$$(b \rightarrow s \wedge \neg c) \wedge (\neg d \rightarrow \neg s) \wedge (d \rightarrow \neg b) \rightarrow (\neg c \rightarrow \neg b)$$

③ Supongamos que existe un contraejemplo a mi razonamiento, es decir que hay una valoración bajo la cual las tres premisas son verdaderas y la conclusión es falsa.
llamemos u a esa valoración.

Como $\psi^u = 0$, tenemos que $(\neg c \rightarrow \neg b)^u = 0$ ②
 $\Rightarrow (\neg c)^u = 1$ y $(\neg b)^u = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \boxed{c^u = 0}$ y $\boxed{b^u = 1}$

Como $(\phi_3)^u = 1$, tenemos que $(d \rightarrow \neg b)^u = 1$
 y, por ser $b^u = 1$, se tiene que cumplir $\boxed{d^u = 0}$

Como $(\phi_2)^u = 1$, tenemos que $(\neg d \rightarrow \neg s)^u = 1$
 y, por ser $d^u = 0$, $(\neg d)^u = 1$ y se tiene que
 cumplir que $(\neg s)^u = 1$, con lo que $\boxed{s^u = 0}$

Si hallamos el valor de verdad de la
 premisa ϕ_1 con los valores obtenidos para
 las proposiciones atómicas, tenemos

$$\begin{array}{ccc} b \rightarrow s \wedge \neg c & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & \\ \hline & 0 & \end{array} \quad , \text{ es decir } \phi_1^u = 0.$$

Esto contradice lo que habíamos supuesto,
 es decir, que todas las premisas son
 verdaderas bajo u . Luego lo que
 hemos supuesto es falso, por tanto
 el razonamiento no tiene contraejemplos,
 es decir, el razonamiento es correcto.

3°

3

a) R no es reflexiva. Contraejemplo:

$$2 \not R 2 \text{ ya que } 2 \cdot 2 = 4 \neq 1.$$

R es simétrica. Demostración:

$$\text{Si } a R b \Rightarrow a \cdot b = 1 \Rightarrow b \cdot a = 1 \Rightarrow b R a.$$

R no es transitiva. Contraejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & R & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} & R & 2 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ x & & y & & y & & z \end{array} \text{ pero } \begin{array}{cc} 2 & \not R & 2 \\ \parallel & & \parallel \\ x & & z. \end{array}$$

R no es antisimétrica. Contraejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & R & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} & R & 2 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ x & & y & & y & & x \end{array} \text{ y } 2$$

b) Vamos a añadir pares de la forma (x, x) para hacer que la relación sea reflexiva. No añadimos los pares $(1, 1)$ ni el $(-1, -1)$ que ya están en la relación (con los únicos números en $\mathbb{Q}$ que cumplen $x \cdot x = 1$).

Definimos

$$S = R \cup \{ (x, x) / x \in \mathbb{Q} \setminus \{1, -1\} \}$$

la relación S es reflexiva porque hemos añadido pares para que estén todos los de la forma (x, x) . y sigue siendo simétrica porque sólo hemos añadido pares de ese tipo.

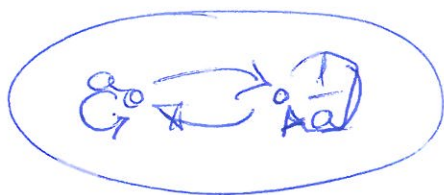
(4)

Una forma de justificar que es transitiva es ver que la división en conjuntos de elementos relacionados entre sí forma una partición de $\mathbb{Q}$ (sabemos por teoría que toda partición lleva asociada una relación de equivalencia):
los valores $1, 0, -1$ sólo están relacionados con ellos mismos.

$\mathbb{Q}_1$ $\mathbb{Q}_{-1}$ $\mathbb{Q}_0$

Para el resto de valores $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\}$ cada uno de ellos está relacionado con exactamente 2 valores:

aSa y $aS\frac{1}{a}$



Como no hay más relaciones entre elementos de $\mathbb{Q}$, S es transitiva (es imposible encontrar un contraejemplo). (5)

(c) El ~~ejercicio~~ apartado anterior nos ayuda a contestar éste:

Si $a \in \{-1, 0, 1\}$

$[a]_S = \{a\}$ Estas clases constan de 1 elemento.

Si $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$[a]_S = \{a, \frac{1}{a}\}$ Estas clases constan de 2 elementos.

(d) Dada la relación R , para cada $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, a sólo está relacionado con $\frac{1}{a}$.

Por tanto R restringida a $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ es una función. Además es biyectiva ya que tiene inversa (su inversa es ella misma). $R(R(a)) = R(\frac{1}{a}) = a$.

Por tanto si ampliamos R mandando el 0 al 0 obtenemos una función biyectiva de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$: ⑥

$f = R \cup \{(0,0)\}$ es una función

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ biyectiva.

4^o

① Si φ es una fórmula atómica

$$f(\varphi) := 0$$

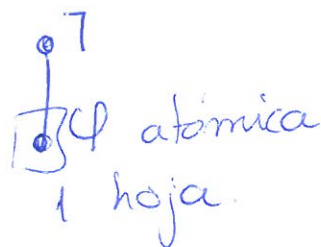
(el único vértice del árbol es la raíz).

② Si φ es una fórmula

$$f(\neg\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \text{si } \varphi \text{ no atómica} \\ 1 & \text{si } \varphi \text{ atómica.} \end{cases}$$

(en el caso general no aparecen hojas nuevas, son las mismas que las de la fórmula φ).

Pero si φ es atómica, $\neg\varphi$ tiene una hoja más que φ , se pasa de 0 a 1)



③ φ, ψ fórmulas cualesquiera,
o conectiva binaria.

⑦

$$f(\varphi \circ \psi) = \begin{cases} f(\varphi) + f(\psi) & \varphi, \psi \text{ no atómicas.} \\ 2 & \varphi, \psi \text{ atómicas} \\ f(\varphi) + f(\psi) + 1 & \text{si una es} \\ & \text{atómica y la} \\ & \text{otra no.} \end{cases}$$

(En el caso general, el número de hojas es la suma del número de hojas de ambos árboles.)

Si las dos fórmulas son atómicas, se pasa a un árbol con 2 hojas.

Si sólo una de ellas es atómica y la otra no, aparece una hoja nueva correspondiente a la fórmula atómica. Nótese que uno de los dos valores $f(\varphi)$ o $f(\psi)$ en la tercera línea es 0.)